Rencontre labomaths

Vendredi 15 mai 2026

Jean-Marc.Ravier@upf.pf

Sommaire

A- Spécificités de l'algèbre : point de vue didactique

1- De l'arithmétique à l'algèbre : rupture ou continuité ?

2- Les différents statuts de la lettre en algèbre

3- Le signe d'égalité : sens et usages

4- Les deux aspects d'une expression algébrique

B- L'algèbre dans les programmes institutionnels

1- Les principales fonctions du calcul littéral dans les programmes

2- Introduction de la résolution algébrique d'une équation en 4e

3- Le travail de la règle en algèbre

C- Quelques analyses d'erreurs d'élèves en algèbre

1. Exemple de rupture lors du passage d'une démarche arithmétique à une démarche algébrique

- Résoudre de deux façons le problème suivant, comme le ferait un élève de début de 6e et comme un élève de fin de 4e.

Je pense à un nombre. Quand 5 est additionné à 2 fois ce nombre, la somme est égale à 35. A quel nombre ai-je pensé ?

Début de 6e : démarche arithmétique

Avant d'ajouter 5, on avait :
35 – 5 = 30
C'est le double du nombre cherché. Donc le nombre vaut la moitié de 30.
30 : 2 = 15
La réponse est 15

On part du connu pour aller vers l'inconnu

Fin de 4e : démarche algébrique
Soit x le nombre cherché

$2x + 5 = 35$ (- 5)
$2x = 35 - 5$ (- 5)
$2x = 30$
$\frac{2x}{2} = \frac{30}{2}$ (÷2) (÷2)
$x = 15$

Importance
Des « oreilles »

Le nombre cherché est égal à 15

On part de l'inconnu pour aller vers le connu

Rupture arithmétique/algèbre

- L'algèbre ne peut pas être considérée comme une simple généralisation de l'arithmétique.
- Un travail de conceptualisation, de construction du sens est nécessaire et cela bien avant la classe de 4ème **où il est tentant de se réfugier dans l'apprentissage de techniques.**
- Le travail sur l'algèbre se fait dès le début du collège et il faut prendre le temps d'installer les différents concepts.

Trouver le maximum d'utilisations (statuts) de la lettre en mathématiques avec des exemples

2. Les cinq statuts de la lettre en mathématique: Etiquette, paramètre, inconnue, variable, indéterminée.

Statut de la lettre	**Exemple**
Indéterminée	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
Variable	$f(x) = 3x + 5$
Inconnue	$5x - 3 = 4x + 2$
Paramètre	$f_n(x) = nx + 5$
Etiquette : nom d'un nombre	π, φ, i, e
Etiquette ; nom objet en géométrie	A, (d)
Etiquette : abréviation unité	m, km
Etiquette : abréviation mesure	h, l, L

Trouver le maximum d'utilisations du signe «=» en mathématiques

3. Différentes utilisations du signe d'égalité

Il a y au moins 7 utilisations différentes pour le signe « égal » :

École primaire

- **Sens 1 : résultat numérique de l'exécution d'une opération**

  4 + 2 = 6 (une seule réponse, sens orienté de lecture, calculatrice)

- **Sens 2 : décomposition numérique**

  6 = 4 + 2 ou 6 = 3 × 2 ; 216 = 2 × 100 +10 + 6 (infinité de décompositions)

- **Sens 3 : valeur équivalente de deux expressions numériques**

  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ (symétrie de l'égalité : si a = b alors b = a)

- **Sens 4 : affectation ou adressage**

  Calcul de $a + 2b$ pour $a = 1{,}3$ et $b = 0{,}7$. On pose f(x) = … (ou informatique)

Collège

- **Sens 5 : valeur équivalente de deux expressions algébriques**

  $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$. (quantificateurs)

Rupture

- **Sens 6 : signe égal conditionnel**

  Résoudre : $3x + 2 = 4 - 5x$.

Lycée et +

- **Sens 7 : résultat d'une limite**

  0,999 … = 1 $\lim_{n \to +\infty} \sum_{1}^{n} \frac{9}{10^n} = 1$

Rupture du sens du signe égal pour les équations

Dans une équation, le signe « = » est utilisé avec des sens différents de manière explicite et implicite

- Les 5 premiers sens sous-entendent « *le vrai* » .
- Dans le sens 6, la proposition peut être vraie ou fausse : c'est une égalité conditionnelle.
- Mais c'est plus complexe encore (voir diapo suivante)



Rupture du sens du signe égal pour les équations

Résoudre dans R : $3x + 2 = 4 - 5x$

Au cours de la résolution de cette équation, combien d'utilisations du signe « égal » relevez-vous ? Quelles autres propriétés ?

$$3x + 5x = 4 - 2$$
$$8x = 2$$
$$x = \frac{2}{8}$$
$$x = \frac{1}{4}$$

L'équation $3x + 2 = 4 - 5x$ admet comme unique solution $\frac{1}{4}$.

→ **Cohabitation de plusieurs sens du signe = (Sens 1, 3, 5, 6)**
→ **Transitivité de l'égalité**
→ **La résolution repose sur :**
- « deux équations équivalentes possèdent les mêmes solutions ».
- des techniques pour déterminer deux équations équivalentes.

4. Les signes opératoires en arithmétique et en algèbre

- En arithmétique, les signes opératoires indiquent principalement les procédures à effectuer pour déterminer un résultat. Ce résultat est numérique.

- En algèbre, certaines écritures indiquent à la fois la procédure et le résultat.
- Exemple : on considère l'écriture « x + 7 »

  → c'est une procédure (addition)

  → c'est un résultat (somme)
- Cette difficulté est à l'origine de transformations « non cohérentes » en 7x ou en x + 7 = 0 qui visent à obtenir un résultat numérique.

Le double aspect d'une expression algébrique

Deux phases dans l'apprentissage :

- ***L'aspect procédural d'une expression algébrique*** : → ***dynamique***

consiste à considérer les expressions **comme des procédures à appliquer**, c'est-à-dire comme une suite d'opérations à appliquer dans le but d'obtenir une réponse unique et numérique.

Exemple : $x^2 + 2x + 3$
« Prendre le carré d'un nombre, lui ajouter le double de ce nombre puis ajouter 3 »

- ***L'aspect structural d'une expression algébrique :*** → ***statique***

consiste à envisager des expressions **comme des objets** sans les considérer comme « calculables ».

Exemple : $x^2 + 2x + 3$
« C'est un trinôme du second degré que l'on peut factoriser, dériver, etc. »

Exemples des aspects procédural et structural au cours d'un calcul

Dans les deux énoncés suivants, indiquer si c'est l'aspect *structural* ou *procédural* qui est privilégié pour résoudre l'exercice.

Exercice 1 :

Soit $A = 6x^2 + 9x$.

Donner la valeur de A pour $x = 4$

Pour substituer x par 4 dans l'expression $A = 6x^2 + 9x$, on exprime un programme de calcul et on effectue une suite d'opérations pour obtenir un nombre.

→ **aspect procédural de l'expression algébrique**

Exercice 2 :

Résoudre l'équation $6x^2 + 9x = 0$.

Pour résoudre $6x^2 + 9x = 0$, on reconnaît de quel type d'équations il s'agit globalement, pour pouvoir appliquer une technique de résolution adéquate. On cherche de quel *objet* il s'agit. Une fois la forme déterminée, on va pouvoir faire de nouveaux calculs.

→ **aspect structural de l'expression algébrique**

Le double aspect d'une expression algébrique

Exemples de difficultés de compréhension des élèves du double aspect procédural/structural

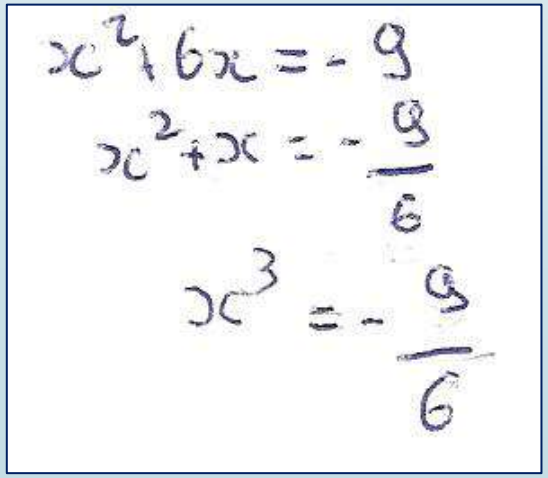
- Ecrire **7x + 3** sous la forme erronée **10x**

→ Addition vue comme une réunion physique d'objets (école primaire)

→ *Concaténation* traduisant la volonté de traduire le signe + par l'action d'ajouter et de donner une réponse « en un seul nb ».

→ Lettre-étiquette : « x c'est des choux, 7 choux plus trois, ça fait 10 choux ».

- Exemple de cet obstacle en seconde :



La dualité procédurale/structurale des expressions algébriques

- Suivant le problème posé, une expression algébrique peut avoir plusieurs interprétations possibles et utiliser davantage l'un des deux aspects (procédural ou structural)

Exemple : L'expression 2x + 1 peut être comprise comme :

→ un *processus opératoire* : multiplier le nombre x par 2 et ajouter 1 au résultat.

→ *l'expression générale de nombres* : nombres impairs (si x entier).

→ *l'image de* x par la fonction qui à x associe 2x + 1.

- La dualité procédurale/structurale est indispensable pour comprendre un concept.

Exemple : On considère la somme $S(x)$ de deux expressions algébriques $x^3 + x + 1$ et $x^2 + 4x - 2$.
On peut écrire :

$$S(x) = x^3 + x^2 + 5x - 1 \qquad (1)$$

ou encore : $S(x) = -1 + 5x + x^2(1 + x)$ (2)

A quels concepts renvoient ces deux écritures ?

Sommaire

A- Spécificités de l'algèbre : point de vue didactique

1- De l'arithmétique à l'algèbre : rupture ou continuité ?

2- Les différents statuts de la lettre en algèbre

3- Le signe d'égalité : sens et usages

4- Les deux aspects d'une expression algébrique

B- L'algèbre dans les programmes institutionnels

1- Les principales fonctions du calcul littéral dans les programmes

2- Une entrée dans l'algèbre par la généralisation

3- Introduction de la résolution algébrique d'une équation en 4e

4- Le travail de la règle en algèbre

C- Quelques analyses d'erreurs d'élèves en algèbre

Les principales fonctions du calcul littéral

- **Outil pour la résolution de problèmes**

→ Modélisation, mise en équation, résolution algébrique ou autre

- **Outil de généralisation**

→ Justification et explication des règles de calcul et des techniques de calcul (*distributivité appliquée au calcul mental, simplification des fractions, …)*

- **Outil de preuve**

→ Conjecture, démonstration

Les fonctions du calcul littéral dans les programmes du cycle 4

Utiliser le calcul littéral

Connaissances

- notions d'inconnue, d'équation, d'indéterminée, d'identité ;
- propriétés de distributivité (simple et double) ;
- annulation d'un produit (démonstration possible par disjonction de cas) ;
- factorisation de $a^2 - b^2$.

Compétences associées

- développer, factoriser, réduire des expressions algébriques dans des cas très simples ;
- utiliser le calcul littéral pour traduire une propriété générale (par exemple la distributivité simple), pour démontrer un résultat général (par exemple que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de trois), pour valider ou réfuter une conjecture, pour modéliser une situation ;
- mettre un problème en équation en vue de sa résolution ;
- résoudre algébriquement des équations du premier degré ou s'y ramenant (équations produits), en particulier des équations du type $x^2 = a$.

Il est attendu de démontrer au moins une propriété du calcul fractionnaire en utilisant le calcul littéral et la définition du quotient.

- **Outil pour la résolution de problèmes**
- **Outil de généralisation**
- **Outil de preuve**

Le calcul algébrique dans les programmes du lycée

- En 2nde, le domaine « algèbre » est proposé dans le domaine des « fonctions ».
- En 1ère Spécialité et en TS, le domaine « algèbre » est proposé plus particulièrement dans le domaine de l'analyse (fonctions, suites, …) et aussi en géométrie (complexes, espace,..) pour la terminale.

- *On retrouve néanmoins le domaine de l'algèbre dans tous les domaines des programmes : géométrie (repérée), statistiques, probabilités, algorithmique …*

Les fonctions du calcul littéral dans les programmes de seconde

- **Utiliser le calcul littéral**

Contenus

- Règles de calcul sur les puissances entières relatives, sur les racines carrées. Relation $\sqrt{a^2} = |a|$.
- Identités $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, à savoir utiliser dans les deux sens.
- Exemples simples de calcul sur des expressions algébriques, en particulier sur des expressions fractionnaires.
- Somme d'inégalités. Produit d'une inégalité par un réel positif, négatif, en liaison avec le sens de variation d'une fonction affine.
- Ensemble des solutions d'une équation, d'une inéquation.

Capacités attendues

- Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires.
- Sur des cas simples de relations entre variables (par exemple $U = RI$, $d = vt$, $S = \pi r^2$, $V = abc$, $V = \pi r^2 h$), exprimer une variable en fonction des autres. Cas d'une relation du premier degré $ax + by = c$.
- Choisir la forme la plus adaptée (factorisée, développée réduite) d'une expression en vue de la résolution d'un problème.
- Comparer deux quantités en utilisant leur différence, ou leur quotient dans le cas positif.
- Modéliser un problème par une inéquation.
- Résoudre une inéquation du premier degré.

- **Outil pour la résolution de problèmes**
- **Outil de généralisation**
- **Outil de preuve**

Les fonctions du calcul littéral dans les programmes de première Spécialité - 2019

- Un domaine « Algèbre » est présent dans ce programme.

- **Suites numériques, modèles discrets**

Contenus

- Exemples de modes de génération d'une suite : explicite $u_n = f(n)$, par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, par un algorithme, par des motifs géométriques. Notations : $u(n)$, u_n, $(u(n))$, (u_n).
- Suites arithmétiques : exemples, définition, calcul du terme général. Lien avec l'étude d'évolutions successives à accroissements constants. Lien avec les fonctions affines. Calcul de $1 + 2 + \ldots + n$.
- Suites géométriques : exemples, définition, calcul du terme général. Lien avec l'étude d'évolutions successives à taux constant. Lien avec la fonction exponentielle. Calcul de $1 + q + \ldots + q^n$.
- Sens de variation d'une suite.
- Sur des exemples, introduction intuitive de la notion de limite, finie ou infinie, d'une suite.

- Proposer, modéliser une situation permettant de générer une suite de nombres. Déterminer une relation explicite ou une relation de récurrence pour une suite définie par un motif géométrique, par une question de dénombrement.

Pour une suite arithmétique ou géométrique, calculer le terme général, la somme de termes consécutifs, déterminer le sens de variation.

- **Équations, fonctions polynômes du second degré**

Contenus

- Fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée. Racines, signe, expression de la somme et du produit des racines.
- Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré. Discriminant. Factorisation éventuelle. Résolution d'une équation du second degré. Signe.

Choisir une forme adaptée (développée réduite, canonique, factorisée) d'une fonction polynôme du second degré dans le cadre de la résolution d'un problème (équation, inéquation, optimisation, variations).

- **Outil pour la résolution de problèmes**
- **Outil de généralisation**
- **Outil de preuve**

Des exemples de problèmes algébriques

➨ **Travail à faire :**

Pour les problèmes algébriques suivants, indiquez :

- de quelle catégorie ils relèvent (outil pour résoudre des problèmes ; outil de généralisation ; outil de preuve)

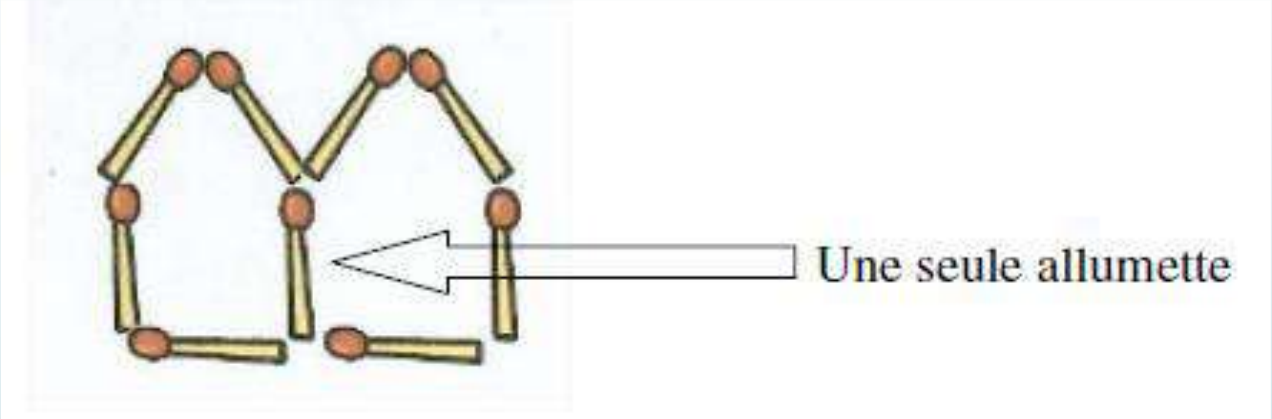
- à quel niveau de classe vous les proposeriez, en justifiant par rapport aux programmes en vigueur.

Catégorie « Outil de généralisation »

Dès la 5e

Problème 1

Avec des allumettes, on veut construire une succession de maisons comme ci-dessous :



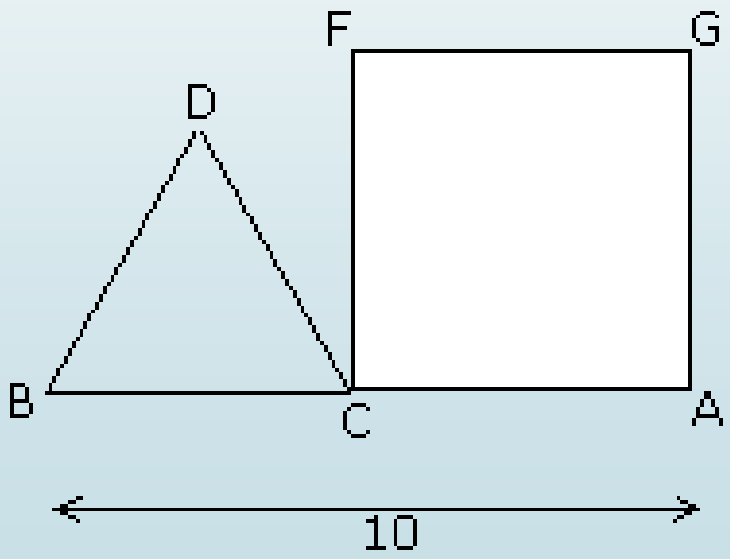
Arthur dit qu'il est capable de trouver la quantité d'allumettes nécessaires à la construction de n'importe quel nombre de maisons. Trouver comment fait Arthur.

Catégorie « Outil pour résoudre des problèmes »

4e – 3e

Problème 2

Le carré ACFG et le triangle équilatéral BDC ont le même périmètre.
Quelle est la mesure d'un côté du triangle ?



x est la mesure du côté du triangle
Équation :
$3x = 4(10 - x)$
Solution : $x = \frac{40}{7}$

Catégorie « Outil de généralisation »

Dès la 5e

❑ **Problème 3**

Le professeur a écrit au tableau l'exercice suivant :

Calculer

23 × 7 + 7 ; 23 × 8 + 7 ; 23 × 9 + 7 ; 23 × 10 + 7

23 × 11 + 7 ; 23 × 12 + 7 ; 23 × 13 + 7 ; 23 × 14 + 7

Un camarade est absent. Quelle consigne lui donner au téléphone, sans lui dicter tous les calculs ?

La consigne est bonne si le camarade sait exactement ce qu'il doit faire.

Catégorie « Outil de preuve »

Dès la 4e

- **Problème 4**

Lorsqu'on ajoute trois nombres entiers consécutifs, peut-on affirmer que la somme obtenue est un multiple de 3 ?

Le problème 4 peut être vu aussi comme un pb de généralisation

Catégorie « Outil de généralisation »

Dès la 4e

Problème 5

1. Que montrent les écritures suivantes du nombre 36 :

$36 = 2\times18$; $36 = 2^2 \times 3^2$; $36 = 17 + 19$;

$36 = 3\times12$?

2. Donner une écriture du nombre 27 montrant que :

27 est un nombre impair ; 27 est un multiple de 3 ; 27 est la somme de deux entiers consécutifs.

3. Que peut-on dire d'un nombre entier qui s'écrit sous la forme :

$2n$; $2k+1$; $7k$ (n et k étant des entiers) ?

Catégorie « Outil de généralisation »

Dès la 5e

❑ **Problème 6**

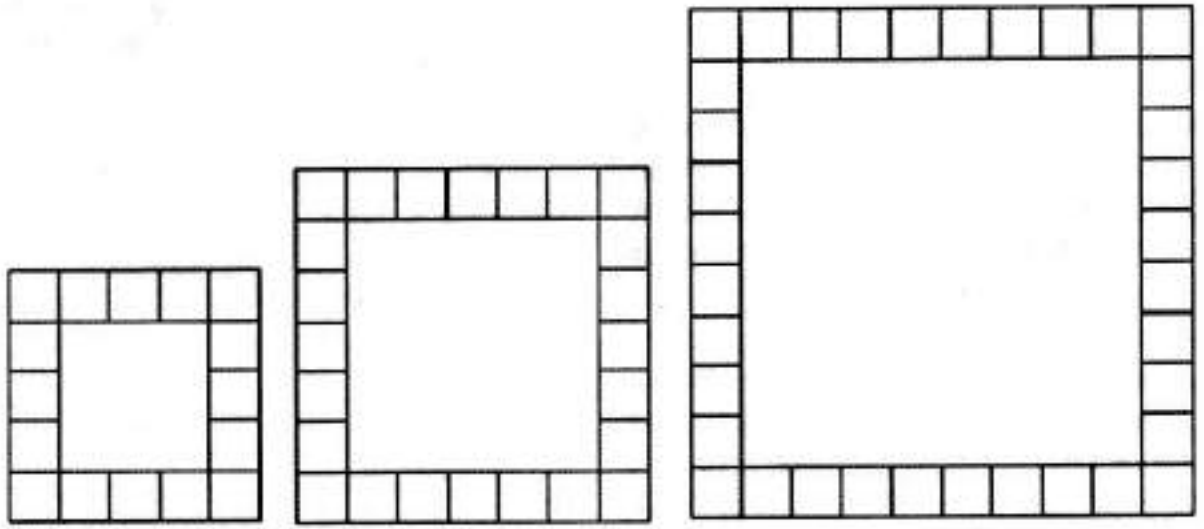
Considérons le programme de calcul suivant :
choisir un nombre ;
le multiplier par 2 ;
ajouter 5 au résultat.
Que donne ce programme si le nombre de départ est 1 ? 2 ? 3 ? 4 ? …. 100 ?

Catégorie « Outil de généralisation »

Dès la 5e

Problème 7

Pierre joue avec des carreaux de mosaïque.
Il dispose ses carreaux pour obtenir des « carrés ».
En voici trois :



Il se demande en jouant, s'il peut savoir à l'avance combien de carreaux de mosaïque il lui faut pour fabriquer n'importe quel carré.

Pouvez-vous l'aider ?

Catégorie « Outil de preuve »

Dès la 4e

- **Problème 8**

Choisis deux nombres dont la somme est 300 et calcule leur produit. Ajoute 7 à chacun d'eux, de combien augmente le produit ?

Catégorie « Outil pour résoudre des problèmes »

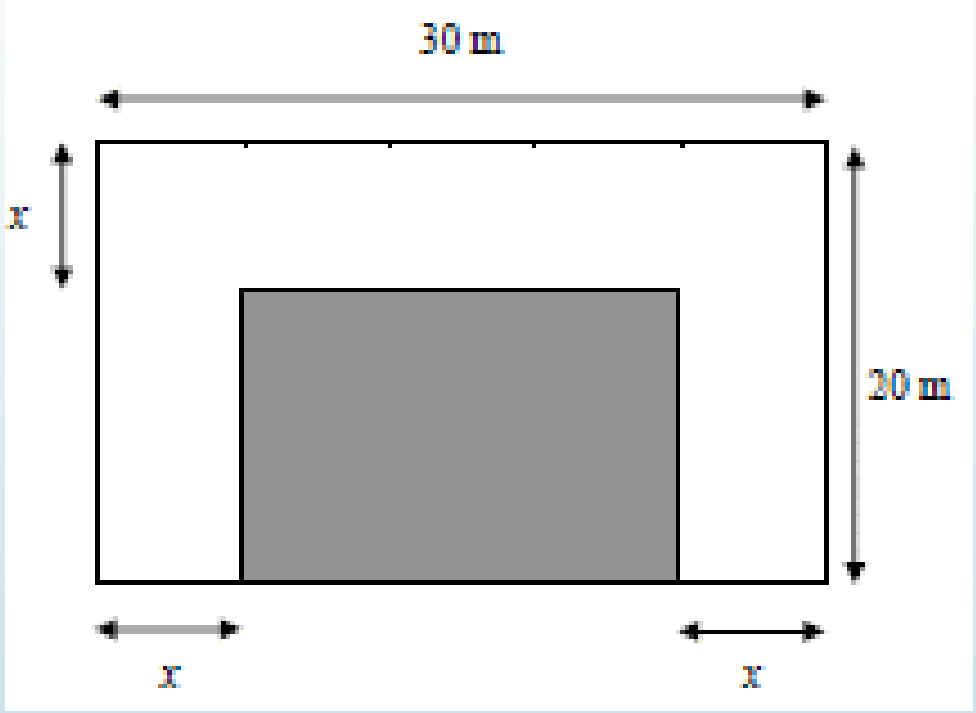
Dès la 2e

Problème 9

Une personne achète un terrain rectangulaire de 600 m² pour y construire sa maison. Le plan de construction de la de maison sur le terrain est représenté par la figure ci-contre.

1. Déterminer l'aire de la maison fonction de x.

2. Pour quelle valeur de x l'aire de la maison est-elle égale à 252 m² ?



Catégorie « Outil de preuve »

3e – 2nde

Problème 10

Dans une classe l'exercice suivant a été donné.

« ***Développer et réduire l'expression littérale :*** **$(2x - 5)^2 - 7(3x + 5)$** »

Voici les résultats trouvés par trois élèves :

Marc : $4x^2 - x + 60$

Sophie : $4x^2 - 41x - 10$

Nadine : $4x^2 - 21x - 210$

1) Le tableau ci-dessous donne les résultats des valeurs prises par chacune des 4 expressions littérales précédentes lorsqu'on choisit $x = 10$, pour la colonne 3, puis lorsqu'on choisit $x = 2$, pour la colonne 4. Il manque deux réponses. Compléter le tableau en utilisant les expressions proposées dans la 2e colonne.

Expressions	x	x = 10	x = 2
Expression du texte	$(2x - 5)^2 - 7(3x + 5)$	- 20	- 76
Marc	$4x^2 - x + 60$	450	**74**
Sophie	$4x^2 - 41x - 10$	-20	- 76
Nadine	$4x^2 - 21x - 210$	**-20**	- 236

2) Peut-on déduire des quatre résultats trouvés pour $x = 10$ (résultats dans la 3e colonne) que l'un des trois élèves s'est trompé ? Si oui, lequel et en est-on sûr ?

3) Peut-on déduire des quatre résultats trouvés à la question 2 (résultats dans la 4e colonne) qu'un autre des trois élèves s'est trompé ? Si oui, lequel et en est-on sûr ?

4) Prouver que l'élève qui reste a trouvé la bonne réponse.

Sommaire

A- Spécificités de l'algèbre : point de vue didactique

1- De l'arithmétique à l'algèbre : rupture ou continuité ?

2- Les différents statuts de la lettre en algèbre

3- Le signe d'égalité : sens et usages

4- Les deux aspects d'une expression algébrique

B- L'algèbre dans les programmes institutionnels

1- Les principales fonctions du calcul littéral dans les programmes

2- Une entrée dans l'algèbre par la généralisation

3- Introduction de la résolution algébrique d'une équation en 4e

4- Le travail de la règle en algèbre

C- Quelques analyses d'erreurs d'élèves en algèbre

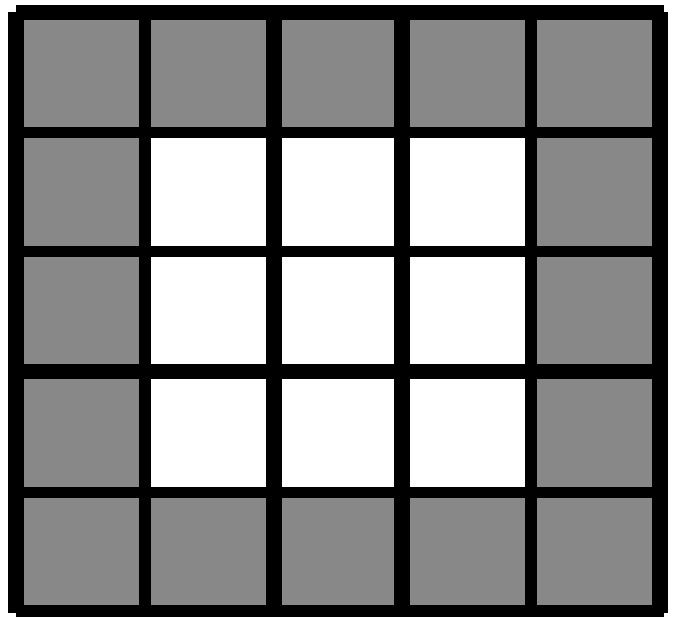
Différentes façons d'entrer dans l'algèbre, selon les pays

- Voie historique (France) par les équations → démarche analytique cartésienne, structures algébriques.
- Voie de la reconnaissance de structures et de la généralisation (pays anglo-saxons) → repérer des « patterns » dans des suites de nombres, dans des configurations géométriques, de les exprimer algébriquement et d'utiliser cette expression algébrique pour les étudier, les caractériser, les comparer.
- Voie de la modélisation (autres pays), en lien avec des situations extra-mathématiques → variables, fonctions.

Michelle Artigue. ***Enseignement et apprentissage de l'algèbre. Conférence sur le site : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale-artigue-1***

Une entrée dans l'algèbre comme outil pour généraliser (et résoudre des problèmes)

- il s'agit d'établir une formule qui permet de calculer le nombre de carreaux grisés d'une figure construite sur le modèle ci-dessous, quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré.
- **Travail individuel :** Répondre aux questions de la fiche.



Objectif premier : faire ressortir l'intérêt d'utiliser une lettre.
Il y a bien des façons de désigner le nombre de carreaux sur le côté : par un symbole, par une lettre… Le choix de recourir à une lettre est le fruit d'une convention. Dans la classe, l'utilisation par les élèves de lettres différentes pour désigner une même variable est un point d'appui important pour montrer que le choix des lettres n'a pas d'influence sur la solution du problème.

Sommaire

A- Spécificités de l'algèbre : point de vue didactique

1- De l'arithmétique à l'algèbre : rupture ou continuité ?

2- Les différents statuts de la lettre en algèbre

3- Le signe d'égalité : sens et usages

4- Les deux aspects d'une expression algébrique

B- L'algèbre dans les programmes institutionnels

1- Les principales fonctions du calcul littéral dans les programmes

2- Une entrée dans l'algèbre par la généralisation

3- Introduction de la résolution algébrique d'une équation en 4e

4- Le travail de la règle en algèbre

C- Quelques analyses d'erreurs d'élèves en algèbre

Gérer la transition arithmétique/algèbre : le « *didactic cut* »

- Le « *didactic cut** » est le moment où l'on fait découvrir à l'élève le besoin de construire de nouvelles significations et de nouveaux sens pour des objets arithmétiques et des opérations, avec la caractéristique supplémentaire que ces nouvelles significations présupposent nécessairement ***un break*** avec l'arithmétique.

- Niveau institutionnel : $4^{ème}/3^{ème}$
- Niveau élèves : tous les jours !

* Filloy et Rojano, 1984

Le « *didactic cut* » ou l'acceptation de la transition arithmétique/algèbre

Comment provoquer le *didactic cut* ?

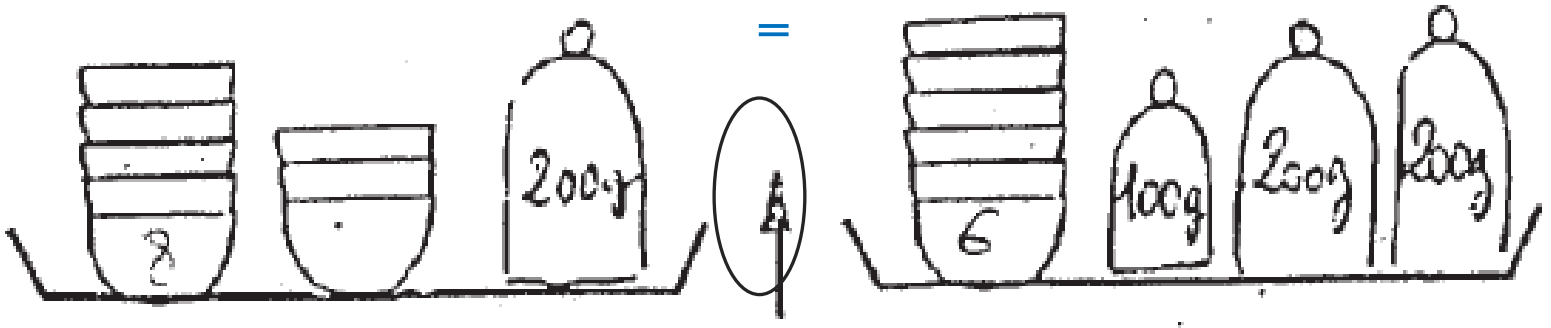
- Passer des équations du type : ***2x + 5= 35*** aux équations du type : ***3x + 7 = 5x + 1***
- Les équations algébriques vont devoir être interprétées, on va donner de nouvelles significations à l'égalité, construire « les inconnues » et doter d'un sens nouveau les opérations.

- Habillage du type : *Deux élèves, Alice et Brice ont chacun une calculatrice. Ils affichent le même nombre sur leur calculatrice. Alice multiplie le nombre affiché par 3 puis ajoute 7 au résultat obtenu. Brice, lui, multiplie le nombre affiché par 5 puis ajoute 1 au résultat obtenu.*
- *Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même nombre. Quel nombre ont-ils choisi au départ ? (Grugeon, 1995)*

Un autre habillage pour l'introduction des équations ax + b = cx + d : la balance

Cette balance est en équilibre. Quelle est la masse d'un bol ?

Sens égal conditionnel : balance en équilibre

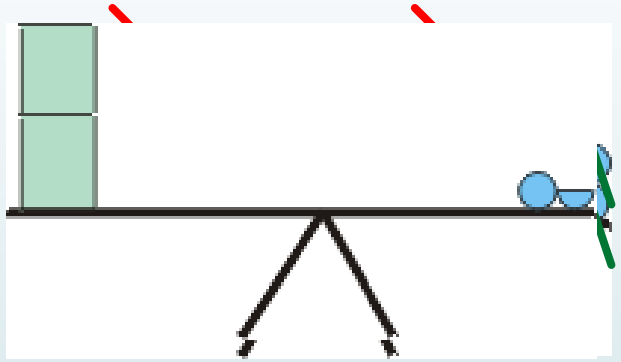


Source : Berté, 2009. IREM

→ Un inconvénient : quantités négatives non explorées
→ Un avantage : explicitation d'une technique de résolution facilitée (voir diapo suivante)

Pour comprendre les égalités équivalentes et la technique de résolution d'une équation du 1er degré

On cherche combien pèse un bloc, l'unité étant la masse d'une bille : on pose qu'un bloc vaut x billes



On se « débarrasse » des blocs sur le plateau droit : on enlève 2 blocs à gauche et 2 blocs à droite.

On se « débarrasse » des billes sur le plateau gauche.
On enlève 2 billes des deux côtés.

Il ya des blocs d'un seul côté et des billes de l'autre.
Pour savoir ce que 1 bloc vaut, on prend la moitié des deux côtés.

La solution est que 1 bloc vaut 3/2 billes.

$4x + 2 = 2x + 5$

$-2x$ / $-2x$

$2x + 2 = 5$

-2 / -2

$2x = 3$

$:2$ / $:2$

$x = 3/2$

la balance n'est pas une simple illustration ou une « métaphore ». Elle est un élément du « milieu » qui permet une dévolution du problème aux élèves.

Un autre habillage : les enveloppes

La mère de Paulette et de Richard décide de faire un cadeau à ses enfants. Elle leur donne des enveloppes contenant des cartes de hockey. Pour que les enveloppes soient identiques, elle met le même nombre de cartes de hockey dans chaque enveloppe.
Paulette avait déjà 7 cartes et sa mère lui donne 1 enveloppe. Richard avait déjà 2 cartes et sa mère lui donne 2 enveloppes. Maintenant, les deux enfants ont le même nombre de cartes de hockey.
Combien y a-t-il de cartes de hockey dans chaque enveloppe ?

Paulette



Richard



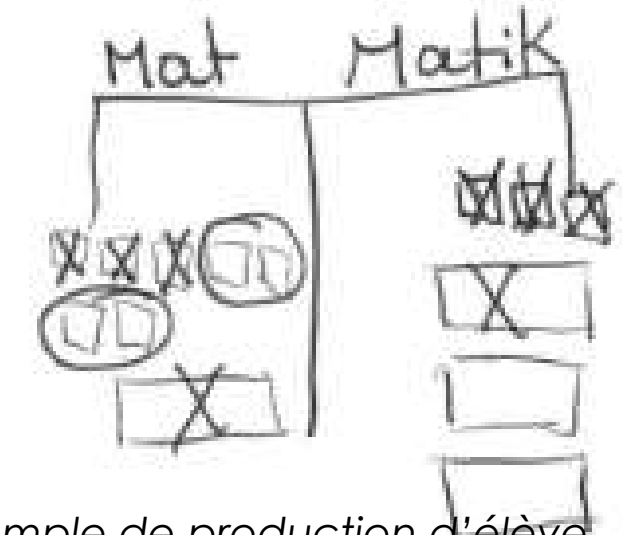
Organisation didactique possible :

- 1ère activité : avec du matériel
- 2e activité : sans matériel, avec des schémas
- 3e activité : en utilisant du symbolisme mathématique

Un autre habillage : les enveloppes

- *Lors de la première activité*, le discours des élèves est principalement oral : il s'agit de construire et d'exprimer oralement une démarche permettant de retrouver le nombre de cartes présentes dans une enveloppe. Sur le plan de la conceptualisation, l'objectif est de mettre en évidence **la propriété de l'égalité** sur laquelle s'appuie la démarche algébrique de résolution d'équations, ancrée ici dans la situation concrète travaillée : **« on peut ajouter ou enlever le même nombre de cartes à chaque enfant, tout en conservant l'égalité du nombre de cartes que possède chaque enfant ».**
- *Dans la deuxième activité*, les élèves ne disposent plus du matériel concret : il s'agit de trouver une manière de résoudre le problème sous forme uniquement écrite. Les élèves sont ici amenés à exprimer sous la forme d'un schéma une stratégie de résolution du problème traité.

Mat a 7 cartes et 1 enveloppe. Matik a 3 cartes et 3 enveloppes. Les deux enfants ont le même nombre de cartes de hockey. Combien y a-t-il de cartes de hockey dans chaque enveloppe ?

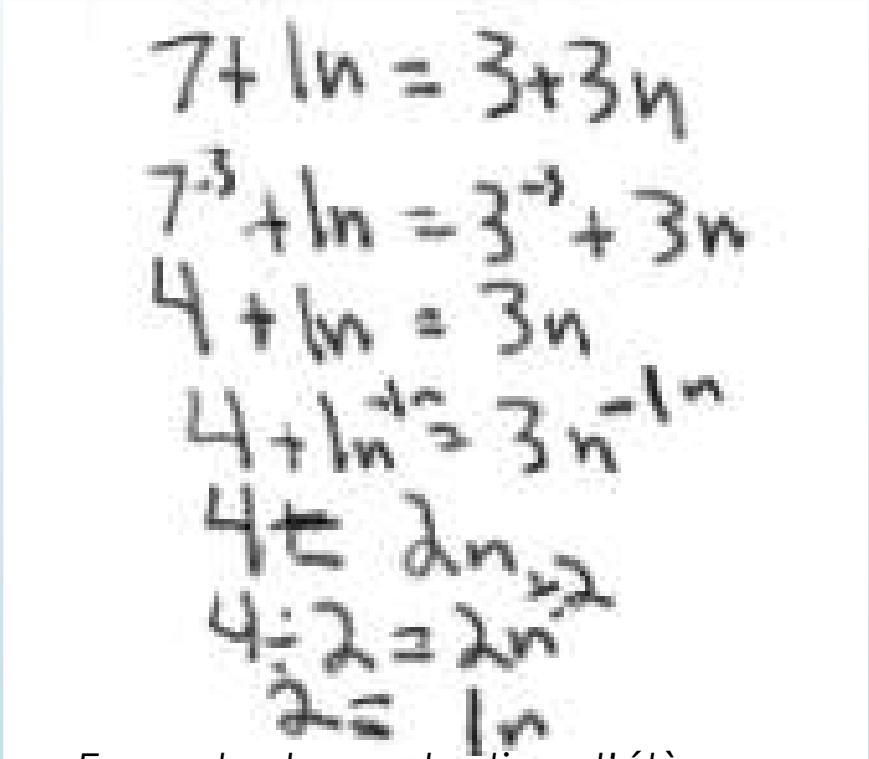


Exemple de production d'élève

Un autre habillage : les enveloppes

- *Lors de la troisième activité*, les élèves sont invités à utiliser le symbolisme algébrique pour résoudre les situations. Les discussions sont d'abord axées sur la manière de symboliser le problème avec des nombres, des lettres et des signes opératoires. Une fois l'équation élaborée, le discours portera sur la symbolisation algébrique de la démarche de résolution.

Mario a 7 cartes et 1 enveloppe. Chantal a 3 cartes et 3 enveloppes. Les deux enfants ont le même nombre de cartes de hockey.
Combien y a-t-il de cartes de hockey dans chaque enveloppe ?



Exemple de production d'élève

Sommaire

A- Spécificités de l'algèbre : point de vue didactique

1- De l'arithmétique à l'algèbre : rupture ou continuité ?

2- Les différents statuts de la lettre en algèbre

3- Le signe d'égalité : sens et usages

4- Les deux aspects d'une expression algébrique

B- L'algèbre dans les programmes institutionnels

1- Les principales fonctions du calcul littéral dans les programmes

2- Une entrée dans l'algèbre par la généralisation

3- Introduction de la résolution algébrique d'une équation en 4e

4- Le travail de la règle en algèbre

C- Quelques analyses d'erreurs d'élèves en algèbre

Un extrait du rapport sur le calcul (commission Kahane pour l'enseignement des mathématiques, 2001)

« Dans la culture, les deux termes : calcul mathématique et raisonnement apparaissent comme antagonistes. Le calcul est opposé au raisonnement tant dans les démarches de pensée qu'il met en œuvre que dans les formes d'apprentissage qu'il requiert.

Le calcul renvoie à une activité mécanique, automatisable, sans intelligence, il est réduit à sa part mécanisée. Son apprentissage renvoie à l'idée d'entraînement purement répétitif. En bref, le calcul est perçu comme renvoyant aux basses œuvres du travail mathématique, tandis que sa partie noble, celle liée au raisonnement est plutôt associée à la résolution de problèmes géométriques.

Cette image, ancrée dans la culture, est aussi portée par l'enseignement. C'est une géométrie synthétique, sans calcul, qui est presque exclusivement mobilisée quand il s'agit d'initier les élèves à la rationalité mathématique, de leur apprendre à démontrer et, lorsque l'on demande à des enseignants quelles sont les fonctions de l'algèbre au collège, la fonction d'outil de preuve n'est généralement pas identifiée. »

Il s'agit d'intégrer visiblement l'algèbre dans le domaine de la rationalité : **les preuves et démonstrations ne sont pas réservées à la géométrie**.
Il est important de faire des démonstrations dans la « partie numérique » des programmes, afin de montrer que les mathématiques se construisent et qu'il y a une cohérence entre les notions. Les règles de calcul ne sont pas arbitraires.

Un exemple de mise en œuvre de justification des techniques en 5e

L'utilisation d'un exemple générique, en parallèle aux écritures littérales, permet de mieux comprendre une démonstration. L'exemple suivant détaille le cas du produit de deux quotients.

$\frac{2}{7}$ est le nombre par lequel on multiplie 7 pour obtenir 2 donc $7\times\frac{2}{7}=2$. De même $3\times\frac{5}{3}=5$.	a, b, c et d sont quatre nombres quelconques ; b et d sont différents de zéro. $\frac{a}{b}$ est le nombre par lequel on multiplie b pour obtenir a donc $b\times\frac{a}{b}=a$. De même $d\times\frac{c}{d}=c$.
Si on multiplie $\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}$ par 7×3, on obtient en changeant l'ordre des facteurs dans le produit : $7\times\frac{2}{7}\times3\times\frac{5}{3}$ soit, d'après ce qui précède : 2×5.	Si on multiplie $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ par $b\times d$, on obtient en changeant l'ordre des facteurs dans le produit : $b\times\frac{a}{b}\times d\times\frac{c}{d}$ soit, d'après ce qui précède : $a\times c$.
On en déduit donc que $\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}$ est le nombre par lequel on multiplie 7×3 pour obtenir 2×5. Donc $\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}=\frac{2\times5}{7\times3}$.	On en déduit donc que $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ est le nombre par lequel on multiplie $b\times d$ pour obtenir $a\times c$. Donc $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$.

Extrait du document ressources : *le calcul sous toutes ses formes au collège et au lycée* (p.9)

Quelles connaissances doit construire l'élève pour comprendre la règle en algèbre ?

Lister les différentes connaissances que l'élève doit construire pour comprendre une règle d'algèbre comme celle-ci (5e) :
$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ *avec b et c différents de 0.*

L'élève doit construire les connaissances suivantes :

- Un nombre possède plusieurs écritures, plusieurs **signes** qui le représentent

$$\text{ex} : \frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

- Pour transformer l'écriture d'un nombre, il faut utiliser une règle (c'est à dire **un théorème**)
- L'égalité de deux écritures d'un même nombre permet de substituer une des écritures à l'autre
- Une expression algébrique est un nombre (ex : $\frac{a}{b}$; x^2; $2n + 1$, …)

Présenter les règles d'algèbre comme des théorèmes

Quelle synthèse feriez-vous écrire à vos élèves dans le cahier de cours (5e) pour leur faire comprendre que la règle suivante est un théorème : $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ *?*

Avec b et c différents de 0.

Bilan : Des règles pour l'enseignement des règles

L'enseignement a pour but de faire comprendre à l'élève qu'une égalité génère deux règles différentes.

Par exemple, concernant la propriété $\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}$ où a, b et k sont des nombres réels avec k et b non nuls, l'élève doit comprendre que :

- Lorsqu'un nombre s'écrit $\frac{a}{b}$ alors ce nombre peut s'écrire aussi $\frac{k \times a}{k \times b}$.
- Lorsqu'un nombre s'écrit $\frac{k \times a}{k \times b}$ alors ce nombre peut s'écrire aussi $\frac{a}{b}$.

Faire comprendre qu'une égalité génère deux règles différentes.

Présenter les règles d'algèbre comme des théorèmes

- Théorème : $\frac{a\times k}{b\times k}=\frac{a}{b}$ (b et k non nuls)
- Règle 1 : *Si un quotient s'écrit sous la forme d'un produit au numérateur et d'un produit au dénominateur qui ont un facteur commun, alors ce quotient a une autre écriture obtenue en supprimant ce facteur commun.*

  Exemple : $\frac{18}{27}=\frac{2\times 9}{3\times 9}=\frac{2}{3}$
- Règle 2 : *Un quotient ne change pas quand on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre (non nul).*

  Exemple : $\frac{2}{3}=\frac{2\times 7}{3\times 7}=\frac{14}{21}$; $\frac{2}{3}=\frac{2\times 3}{3\times 3}=\frac{6}{9}$
- Remarque : *Toutes ces fractions sont donc égales entre elles. Elles représentent le même nombre :* $\frac{2}{3}=\frac{14}{21}=\frac{18}{27}=\frac{6}{9}\ldots$

Proposition d'activité pour faire travailler des règles algébriques

- Une règle est donnée ;
- Des cas susceptibles de relever de la règle sont proposés ;
- L'élève doit vérifier dans chaque cas si les conditions d'utilisation de la règle sont présentes et donner éventuellement la conclusion

Proposition d'activité pour faire travailler des règles algébriques

Règle : *Si un produit de deux facteurs est nul alors l'un ou l'autre de ces facteurs est nul.*

Dire si la règle précédente peut s'appliquer dans chacun des cas suivants :
Si la réponse est oui, expliquer pourquoi et dire ce que la règle permet de conclure ;
Si la réponse est non, expliquer pourquoi.

1. $(x+3)\times(y-2)=0$
2. $(x+3)+(y-2)=0$
3. $x(2x-5)=0$
4. $(x+1)\times(x+7)=7$
5. $(5x+1)(3x-1)=(5x+1)(x-8)$
6. $(7x-3)\times(x+1)\geq 0$
7. $\dfrac{x+5}{x-3}=0$
8. $(x-3)(y+2)(z+6)=0$

Sommaire

A- Spécificités de l'algèbre : point de vue didactique

1- De l'arithmétique à l'algèbre : rupture ou continuité ?

2- Les différents statuts de la lettre en algèbre

3- Le signe d'égalité : sens et usages

4- Les deux aspects d'une expression algébrique

B- L'algèbre dans les programmes institutionnels

1- Les principales fonctions du calcul littéral dans les programmes

2- Une entrée dans l'algèbre par la généralisation

3- Introduction de la résolution algébrique d'une équation en 4e

4- Le travail de la règle en algèbre

C- Quelques analyses d'erreurs d'élèves en algèbre

Analyse d'erreurs d'élèves en algèbre

Dans les productions d'élèves (réelles !) qui ont été proposées dans des classes et des niveaux différents :

En quatrième

Les erreurs sont-elles de nature algébrique ?

Remplace x et y par leur valeur pour calculer chaque expression.

$B = -3x + 8y$ pour $x = 7$ et $y = -4$

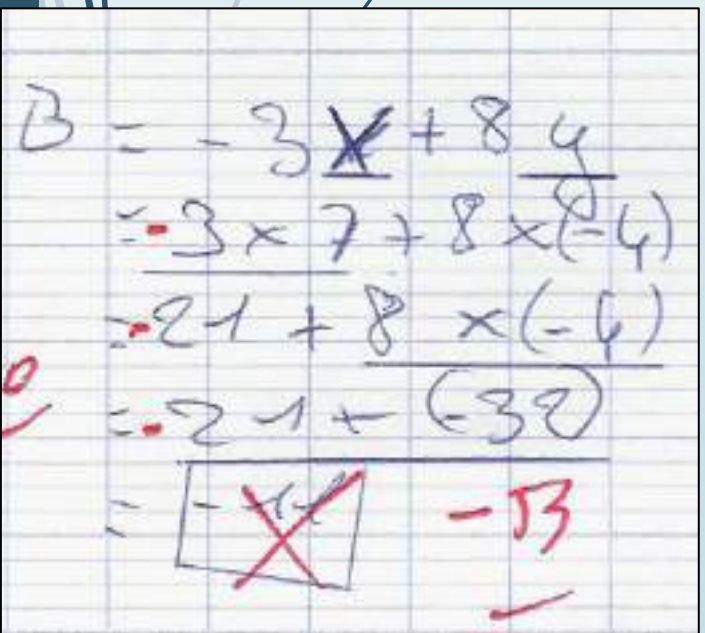
$D = (2x + 1)(2 - y)$ pour $x = -1$ et $y = -9$

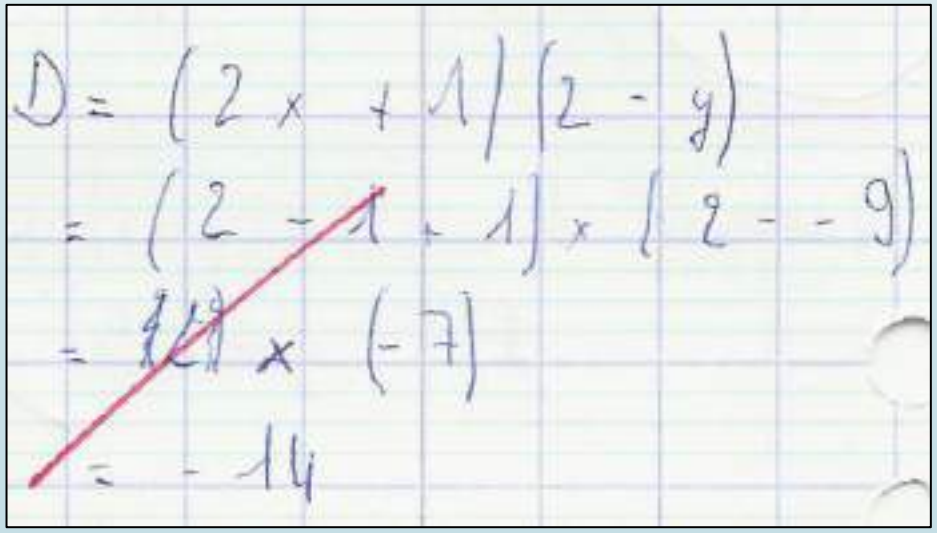
$E = x^2 + 2xy + y^2$ pour $= -3$ et $y = -2$

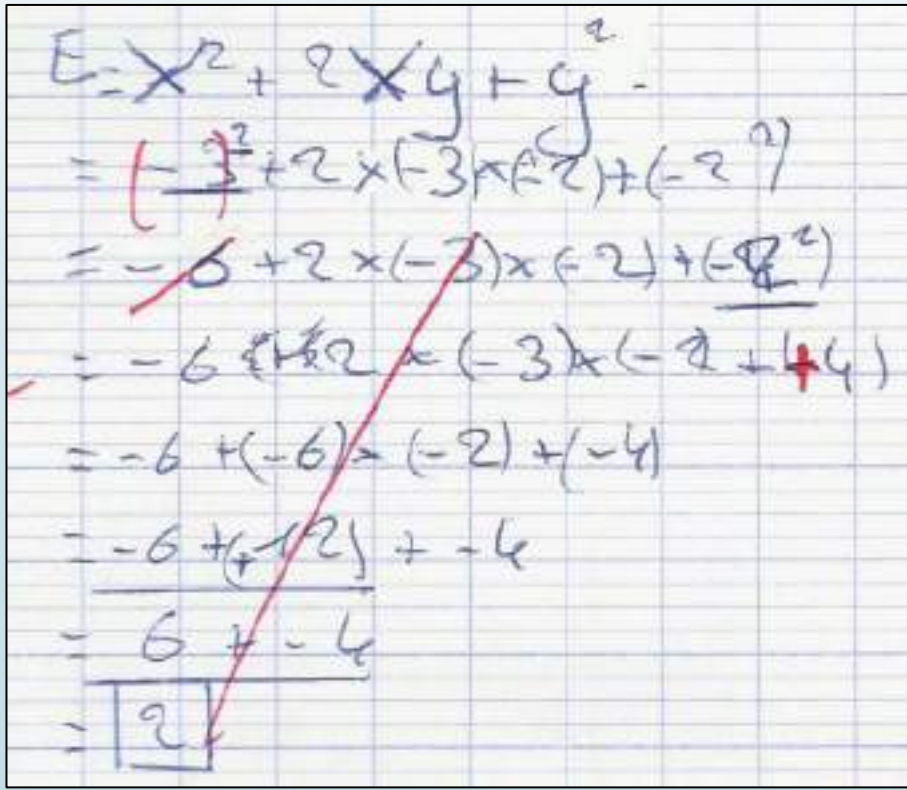
Confusion addition et multiplication (2x et 2 + x)

Confusions :
$-x^2$ et $(-x)^2$
x^2 et $2x$
→ *fausse linéarité*

Production 1





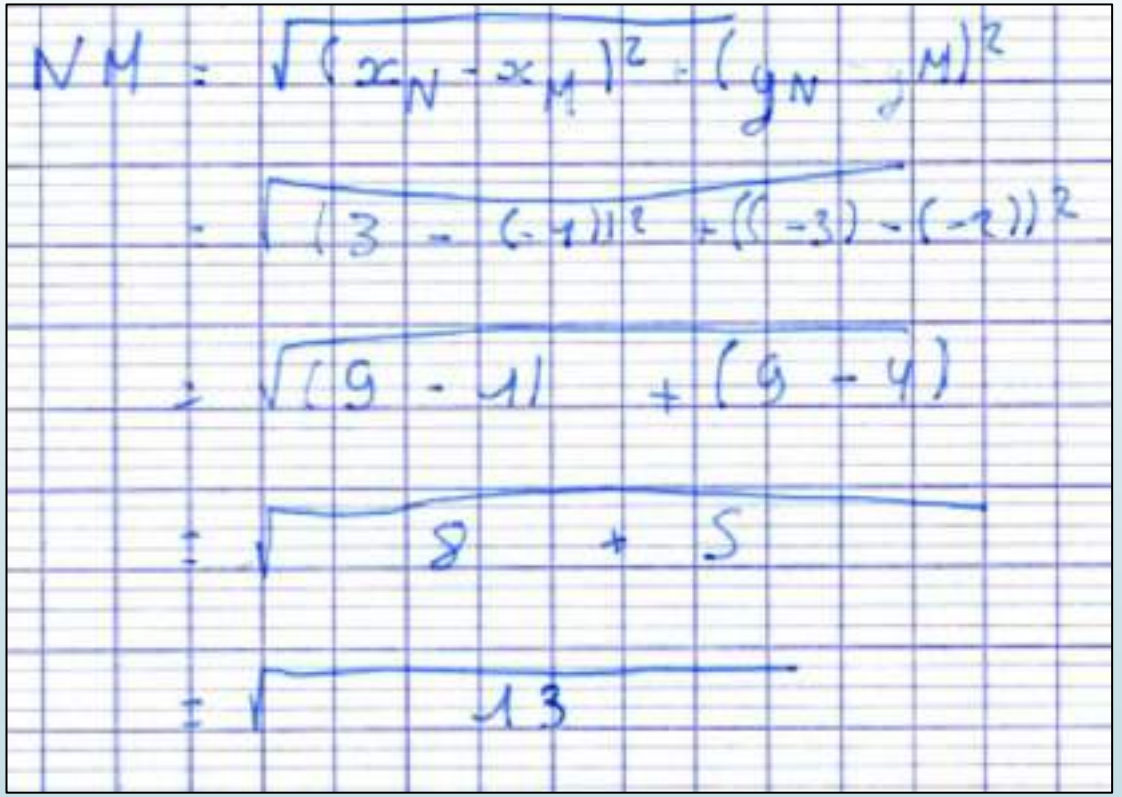


En seconde

Les erreurs sont-elles de nature algébrique ?

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Soient M(-2 ; -1) et N(-3 ; 3). Calculer la distance MN.

Production 8

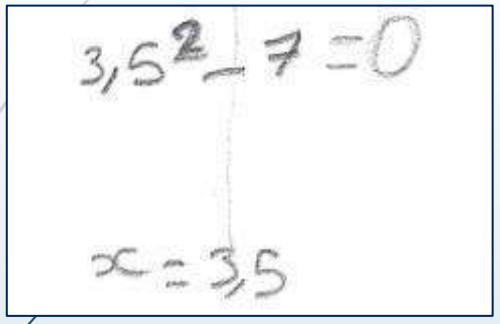


Confusions :
$(a - b)^2$ et $a^2 - b^2$
→ *fausse linéarité*

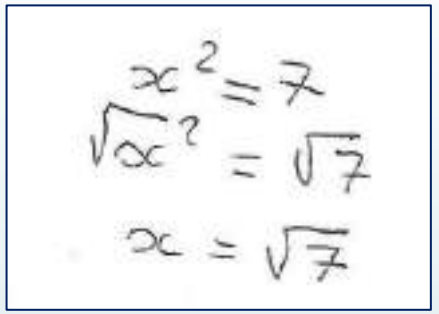
En seconde

Résoudre dans **R** : $x^2 - 7 = 0$

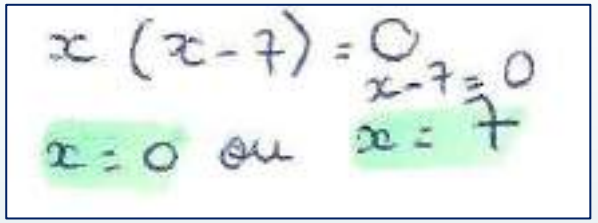
Confusions : $2x$ et x^2 ; $\sqrt{x}$ et x^2
« La racine carrée supprime le carré »
Factorisation erronée; confusion règles différence nulle et produit nul



Production 9



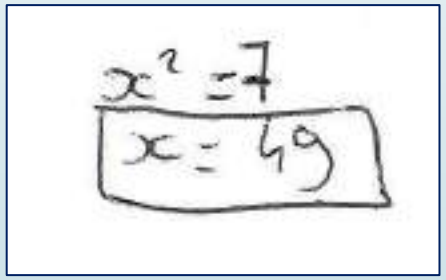
Production 10



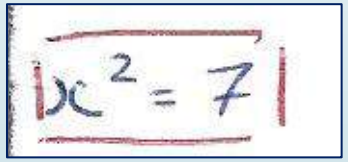
Production 11



Production 12



Production 13



Production 14

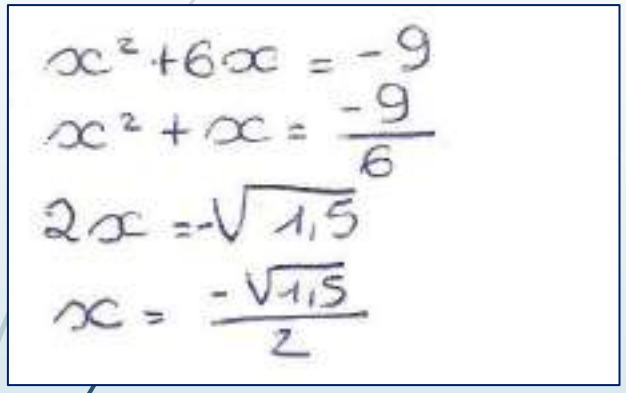
Sur une classe de seconde de 27 élèves,
0 % de réussite.
48% donnent la réponse $\sqrt{7}$

En seconde

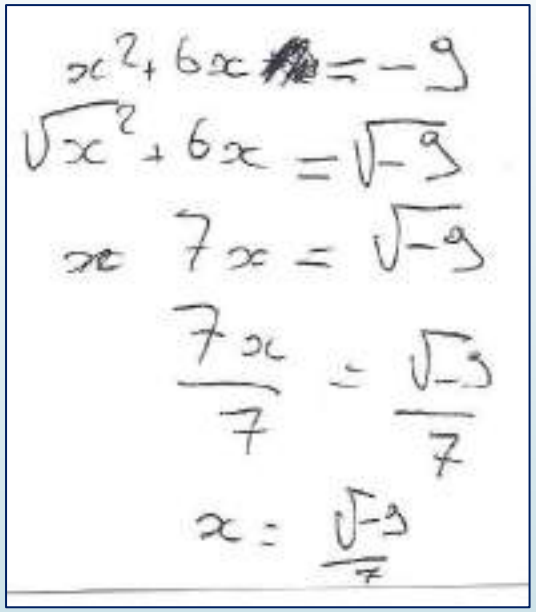
Résoudre dans **R** : $x^2 + 6x + 9 = 0$

Confusions :

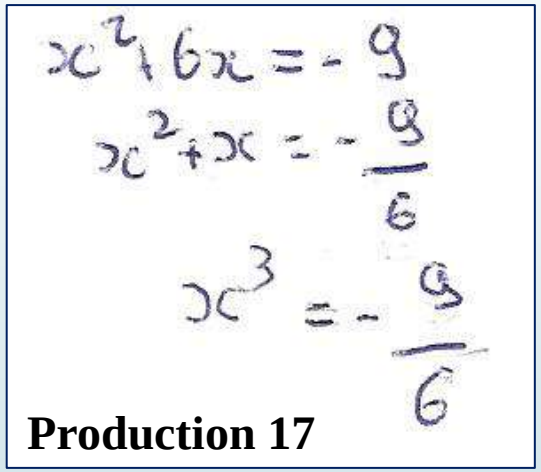
- **techniques de résolution des équations de degré 1 et 2 (isoler x dans un membre)**
- **x et x^2 ; $\sqrt{x+y}$ et $\sqrt{x}+\sqrt{y}$**
- **« La racine carrée supprime le carré »**
- **Factorisation erronée**
- **Règles sur les puissances …**



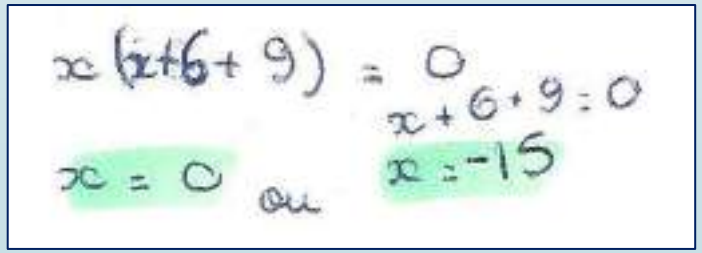
Production 15



Production 16



Production 17



Production 18

FIN